絵を壁にかける **2017 年 5 月 9 日**

私の好きなパズルの本 [1] から、子供にもわかる素敵な問題を１つ紹介します。[1]

> **”額縁に入れた絵を壁に掛けようと思っているとしよう．絵を壁に吊るすためのヒモは，両端が額縁の裏側の 2 点にしっかりと固定されている．このヒモを壁に打ってある 2 本の釘に引っ掛けて絵を掛けるのだが，その際，図にあるような通常の仕方でヒモを釘に引っ掛けた場合には，釘が 1 本壁から抜けただけでは，絵は（ずいぶん傾くかもしれないが）もう 1 本の釘のおかげで落っこちずにすむ．**
>
> **それでは，どちらか１本の釘が抜けただけで必ず絵が落っこちるようにヒモを釘に引っ掛けておくことはできるであろうか．”**

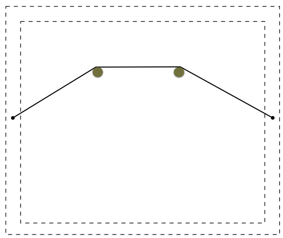


図 1: 釘が 1 本となっても絵が落っこちない紐の掛け方

問題の意味を確認するために、条件を満たさない場合の例を見てみましょう。図 2 に示す紐のかけ方では、左の釘が抜ければ絵が落ちますが、右の釘だけが抜けた場合には、紐が釘に引っかかり、絵は壁に残ります。[2]（図 3）

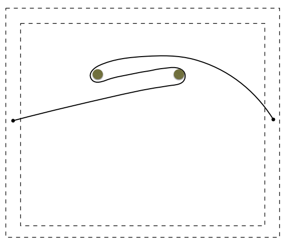


図 2: 正解ではない紐の掛け方の例

この文章では、”トポロジー（位相幾何）”という数学の分野の考え方を使いながら順を追ってこの問題を解説していこうと思います。第 2 節までが準備のようなもので、第 3 節（5 ページ目）から解答が始まります。ヒントがあっても難しい問題ですが、好きなところまで読んだ上で、一度自分で絵を描いて考えてみると、内容が味わいやすいかも知れません。

---

[1] 他のコラム同様、読者としては広く中高生〜大学生以上を想定しています。

[2] それ以前に、これでは絵が水平にならないことが気になる方もいるかもしれませんね。正しい答えでは、絵は水平に掛かります。

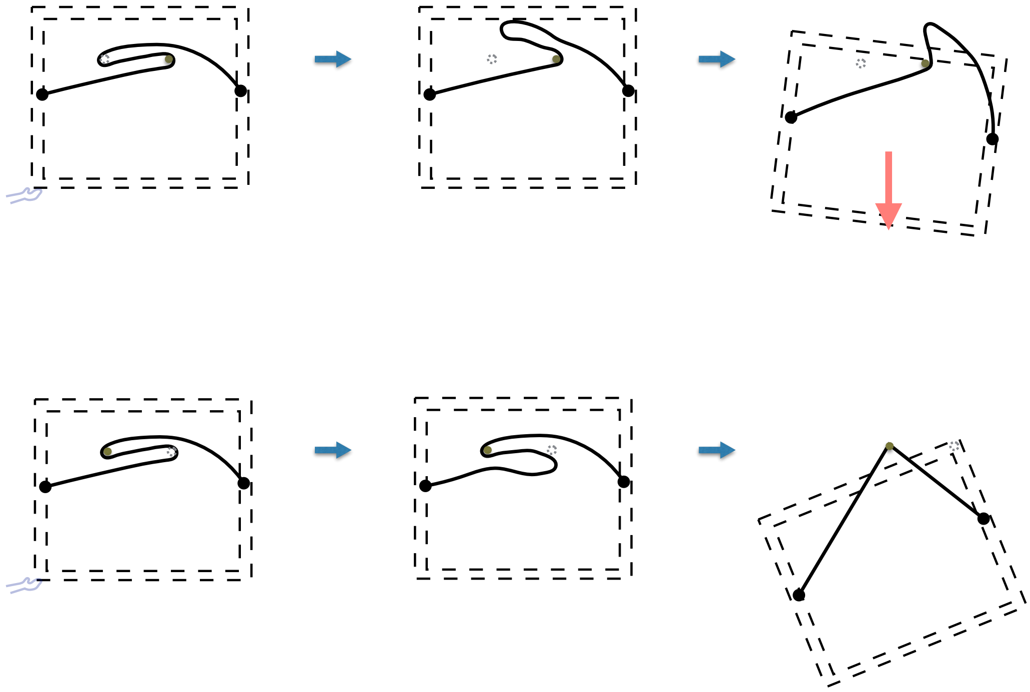
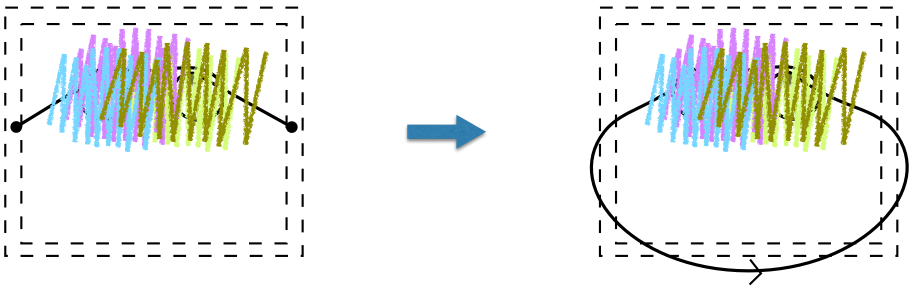


図 3: （上段）左の釘が抜けた時には絵が落下する（下段）右の釘が抜けた時には絵が壁に留まる

なお、[1] の著者はダートマス大学で数学を専攻する大学院生からこのパズルのことを教えられ、その大学院生はヨーロッパにいるときに何度か同じ問題を聞いたことがあったそうです。欧米の大学ではよく知られた問題なのかもしれません。

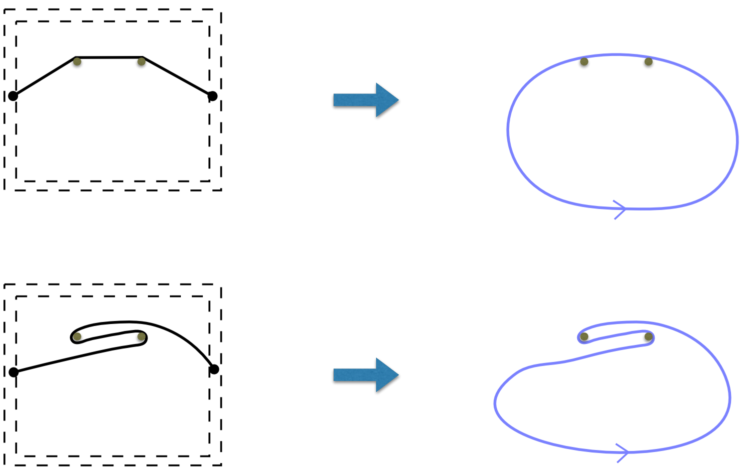
1　問題の言い換え

　まず、上下を気にしなくて済むように、絵を留める紐の両端を下図のようにつなげて、輪にしておきましょう。あとの都合上、輪の上に矢印を描いて向きを決めておきます。（輪全体で一つの方向に決まっていれば、矢印はどちら向きでも結構です。）



この輪になった紐は、平面上で連続的に変形できるものと考えます。ただし変形の際に輪が自分自身と交差するのは構いませんが、釘の打たれた点は通り抜けることができないものとします。

　例えば図 1、図 2 に挙げた 2 つの例は、次のような輪の配置に置き換えられます。



このように紐を輪で置き換えたとき、冒頭のパズルは次のように言い換えられます：

問（★）　2 本の釘が打たれた平面上に、以下の 2 つの条件を満たすように 1 つの輪を配置することはできるだろうか。

- 釘が 2 本ある状態では、輪を外す事ができない。
- どちらか片方の釘を抜けば、輪を連続変形して外す事ができる。

2　巻きつき数

次に、問題の見通しを良くするために役立つ基本的な概念を準備しましょう。

釘のまわりで向き付けられた紐が何周まわっているかを表す数を、その釘の周りの**巻きつき数**（winding number）と呼びます。例えば図 4 のように、釘の周りを紐が左回りに 1 回まわったら、巻きつき数+1 と数えることにします。[3] 巻きつき数について考える時には、どの釘（点）の周りで考えているかを明確にしておく必要があります。

ここで重要なことを 2 つ注意しておきます。

- 巻きつき数は、釘を通過しないように輪を連続的に変形させても変化しません。
- 平面に釘が 1 本だけある場合に、釘から輪を外すことができるのは、その釘の周りでの巻きつき数が 0 の時だけです。

これらの証明はしませんが、ごく自然なこととして納得できると思います。

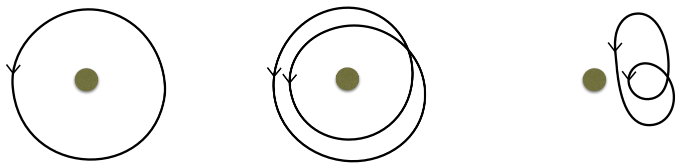


図 4: 巻きつき数。左：巻きつき数 1　中：巻きつき数 2　右：巻きつき数 0

図 5 に巻きつき数が 0 になるような輪の配置を 3 つ書きました。特に、一番右の例は、”？”の部分の詳細によらず巻きつき数は 0 です。このことを理解するためには、例えば輪の上を矢印に沿って歩く蟻を想像してみると良いでしょう。蟻が”？”の辺りでどう動いても、釘の周りをまわる回数には影響しません。

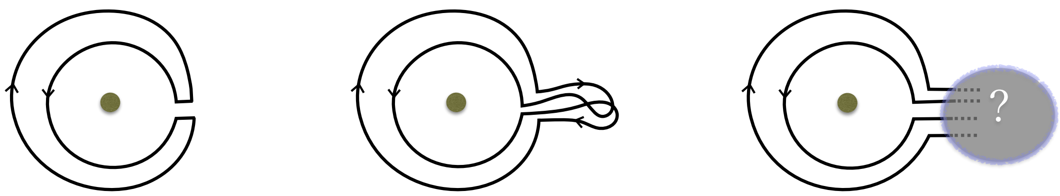


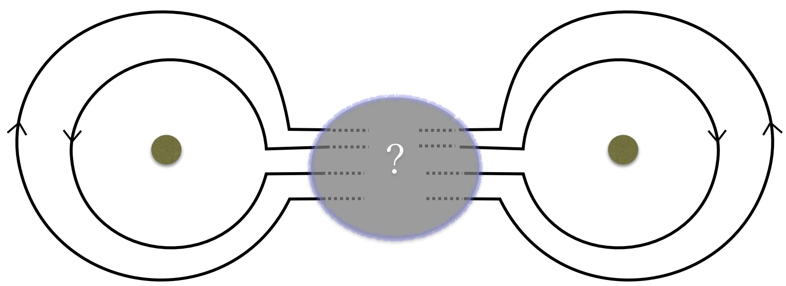
図 5: 釘の周りの巻きつき数が 0 になる閉曲線の例

[3]右回りに 1 回まわれば、巻きつき数は -1 です。従って、一般に巻きつき数は、整数（$0, \pm1, \pm2, \ldots$）に値を取ります。

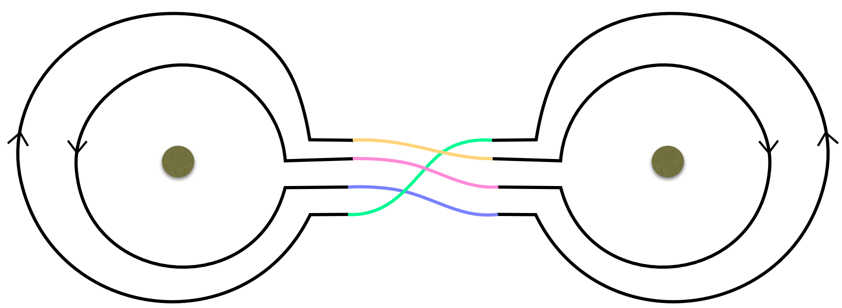
3

さて、巻きつき数の考え方を冒頭のパズルを解くのに利用しましょう。そのためには、次の事実に気づくことが基本的です：釘を一本抜いたときに輪が外せるためには、左右それぞれの釘の周りで、巻きつき数がゼロになっていればよい。

そこで、前節の最後に挙げた配置の輪を 2 つ用意し、それらをつなぎあわせて 1 本にすることを考えてみましょう。下の図で、”? ”の部分がどのようにつながっていたとしても、各釘のまわりの巻きつき数は 0 です。



この ”? ”の部分は、全体として紐が一つの輪となるように、向きまで考慮して繋ぎ合わせることができます。



これで言い換えた問題 (★) の答えが得られました。釘が 2 本ある状態で輪が外れないこと、左右いずれかの釘が抜ければ輪を外すことができることを確認してみて下さい。

　さらに、図 6 のように変形することで、輪の配置を最初の問題の答えに言い換えることができます。

以上で、パズルの条件を満たすような絵の掛け方が見つかりました。

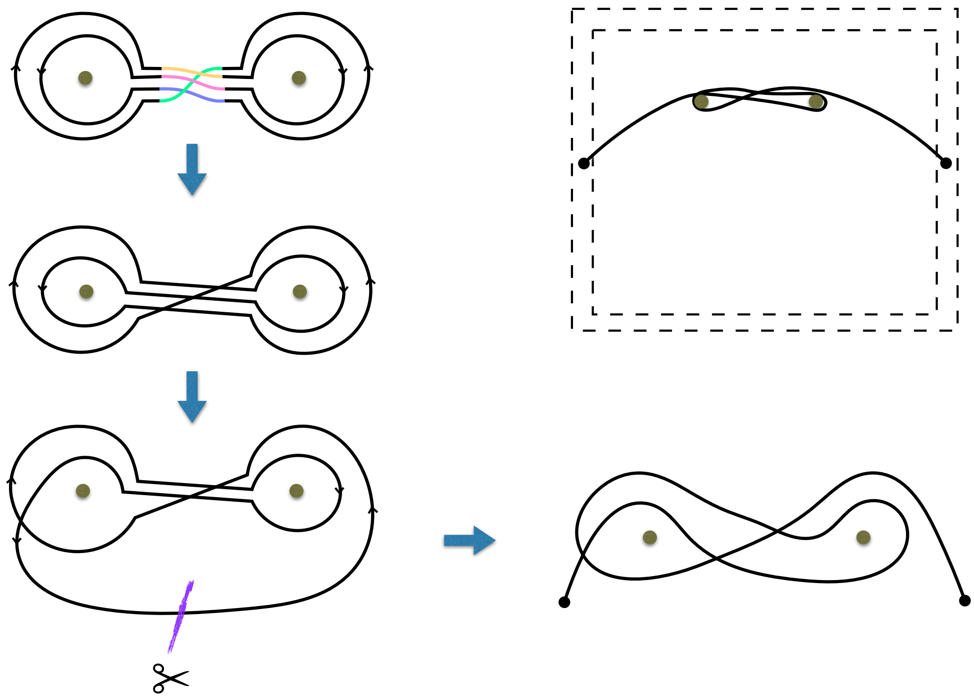


図 6: どちらか 1 本の釘が抜けただけで必ず絵が落っこちるような紐の掛けかた

4

一見すると思いつき勝負のようで、適当な視点に立てば手順を追って解けるのが、このパズルのおもしろいところだと思います。巻きつき数の概念はとてもシンプルなものですが、難しい問題を見通しのよいものに変える力をちゃんと持っているわけです。

物理・生物・化学などの自然科学や、医療・情報・工業デザイン・データ解析などの分野においても、巻きつき数をはじめとするトポロジーの考え方が登場して、独特のおもしろい役割を果たすことがあります。これらの応用は多岐に渡るため、ここでその全体を紹介することはできませんが、代わりに、私が読んでわかりやすいと思った本や解説記事などを少しだけ挙げておきます。主に大学生以上向けですが、興味のある方は [3][4][5][6][7] などを調べてみて下さい。またウェブサイト [8] には、入門的なものから専門的なものまで含め、様々な文献が紹介されています。

Exercise

これまでの議論を見ていて気付いた人もいると思いますが、条件を満たすような紐の掛け方は 1 通りではありません。図 6 に示したものの他にどんな答えがあるか、考えてみましょう。

Project

釘が 3 本ある場合に、どの 1 本を抜いても絵が落ちるような紐の掛け方を見つけましょう。釘が n 本ある場合はどうでしょうか。

Further Reading

[1] ピーター・ウィンクラー『続・とっておきの数学パズル』　日本評論社　2012 年

[2] Topology & Geometry by Dr Tadashi Tokieda, held at AIMS South Africa in 2014 (videos on YouTube).

[3] R. Ghrist, "Elementary Applied Topology," ed. 1.0, Createspace, 2014; Robert Ghrist's homepage, https://www.math.upenn.edu/ ghrist/notes.html

[4] C・C・アダムス　（金信泰造訳）『結び目の数学』 培風館　1998 年

[5] 橋本幸士　『D ブレーン　超弦理論の高次元物体が描く世界像』　UT Physics 2　東京大学出版会　2006 年

[6] 平岡裕章『タンパク質構造とトポロジー　パーシステントホモロジー群入門』共立出版　2013 年

[7] Michael Berry's webpage, https://michaelberryphysics.wordpress.com/

[8]『トポロジーの様々な分野への応用』 in ”Algebraic Topology — A Guide to Literature,” (web page) http://pantodon.shinshu-u.ac.jp/topology/literature/index.html